★ ★

Exercice 1

1) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels positifs. Montrer que si $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = 0$
2) Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^n x_k = n$ et $\sum_{k=1}^n x_k^2 = n$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 1$.

★ ★

Exercice 2

Déterminer si chacun des ensembles suivants admet une borne supérieure/inférieure ou un maximum/un minimum

1) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$
2) $B = \left\{ \dfrac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
3) $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \right\}$
4) $D = \{ x + y \mid x \in]3, 5[, y \in] - 1, 1] \}$

★ ★

Exercice 3

Montrer que $1 + |xy - 1| \leq \big(1 + |x - 1|\big)\big(1 + |y - 1|\big)$.

★ ★

Exercice 4

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $|x - 6| \leq \dfrac{1}{2}$
2) $|x + 1| + |x - 3| = 5$
3) $|x - 4| + |x| = 1$
4) $\dfrac{1}{x + 3} > x - 1$
5) $\dfrac{1}{x^2 - 4} \leq 3$
6) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$
7) $4 \exp(2x) - 4 \exp(x) + 1 = 0$
8) $\sqrt{x - 1} = \sqrt{1 - x}$
9) $\sqrt{3x - 2} = x$

★

Exercice 5

Soient a et b deux nombres réels. Montrer que

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \text{et} \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

★

Exercice 6

Soient a et b deux réels positifs. On appelle **moyenne géométrique** de a et de b le nombre $g(a, b) = \sqrt{ab} = (ab)^{1/2}$, on appelle **moyenne harmonique** de a et de b le nombre $h(a, b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ et on appelle **moyenne quadratique** de a et de b le nombre $q(a, b) = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

La **moyenne arithmétique** de a et de b est le nombre noté $m(a, b) = \dfrac{a + b}{2}$.

Le but de cet exercice est de montrer que quels que soient les réels positifs a et b on a

$$h(a, b) \underset{(1)}{\leq} g(a, b) \underset{(2)}{\leq} m(a, b) \underset{(3)}{\leq} q(a, b)$$

1) Montrer que pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|ab| \leq \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2) En déduire l'inégalité (2)
3) Déduire de cette inégalité l'inégalité (1)
4) Démontrer l'inégalité (3)

★

Exercice 7

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $E(-x) = -E(x)$.

⋆
Exercice 8

Soit x un réel fixé. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(nx)}{n}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

⋆ ⋆
Exercice 9

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x)$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

⋆
Exercice 10

Écrire $\dfrac{3}{4-2\sqrt{7}}$ et $\dfrac{8+3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ sans racine au dénominateur.

⋆
Exercice 11

Déterminer la limite de la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

⋆
Exercice 12

Calculer $\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

⋆
Exercice 13

Simplifier $\sqrt{1+2^{2/3}+2^{-2/3}}$.

⋆
Exercice 14

Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{2^{n^3}}{3^{n^2}}$

⋆
Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{x/2} = \left(\dfrac{x}{2}\right)^x$ après avoir déterminé l'ensemble de définition de cette équation.